**593**. D'Amore B. (2007). *El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria*. Cuadernos del Seminario en educación, n. 8. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Pagg. 36.

# El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria

**En memoria de Francesco Speranza [1932-1998]**

**Bruno D'Amore**
**Departamento de Matemática**
**Universidad de Bologna - Italia**

Sunto. *In questo studio si propone di considerare come fondamentale la preparazione dei futuri docenti di Matematica della scuola secondaria non solo in Matematica ed in Didattica della matematica, ma pure in Epistemologia della matematica. Ciò per due motivi, uno culturale ed uno professionale. Il motivo culturale sta nella figura stessa del docente che, per prima cosa, deve operare una trasposizione didattica dal Sapere al sapere insegnato che tenga conto degli allievi e che, per seconda cosa, deve comunicare con essi sui temi della Matematica; sia per poter operare la trasposizione sia per dare efficacia alla comunicazione, si mostra in questo testo come sia necessaria una preparazione epistemologica. Il motivo professionale sta nel fatto che gli ostacoli cosiddetti epistemologici richiedono, per essere aggirati, profonda consapevolezza e conoscenza da parte del docente. Si sostiene anche che una buona competenza epistemologica non può prescindere da una competenza storica, dato che le due devono essere viste profondamente intrecciate.*

Abstract. *This paper considers fundamental for future secondary school Mathematics teachers training not only in Mathematics and Mathematics education but also in Epistemology of Mathematics. Two reasons are proposed: one cultural and one professional. The first reason derives from the fact that the teacher must first of all effect a didactic transposition from Knowledge to "taught knowledge" based on students themselves and then communicate with them about Mathematical questions. In both cases an epistemological training if necessary. The professional reason derives from how overcoming so-called epistemological problems requires a profound awareness and understanding on the part of the teacher. Moreover, a solid epistemological competence requires the same level of historical competence, since both are inextricably linked.*

Resumen. *En este estudio se propone considerar como fundamental la preparación de los futuros profesores de Matemática de la escuela secundaria no sólo en Matemática y en Didáctica de la Matemática, sino también en Epistemología de la Matemática. Esto por dos motivos, uno cultural y otro profesional. El motivo cultural se centra en la figura misma del docente que, en primer lugar, debe realizar una transposición didáctica del Saber al saber de enseñar, que tenga en cuenta los alumnos, y, en segundo lugar, debe comunicarse con ellos haciendo uso de los temas de la Matemática; en este texto se pone de manifiesto la necesidad de una preparación epistemológica ya sea para realizar la transposición didáctica como para hacer eficaz dicha comunicación. El motivo profesional está en el hecho que los obstáculos llamados epistemológicos requieren, para ser circundados, de un profundo conocimiento y de una gran toma de conciencia por parte del profesor. Se sostiene también que una buena competencia*

*epistemológica no puede prescindir de una conciencia histórica, dado que los dos aspectos deben ser vistos profundamente entrelazados.*

## 1. Premisa

Hace algunos años, creo tal vez en 1991 o en 1990, el Departamento de Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Tesalónico (por iniciativa de Athanasios Gagatsis, quien, en ese entonces, era profesor en dicha ciudad), nos propuso, a Francesco Speranza[1] y a mi, dictar un ciclo de conferencias; el día anterior al inicio del Seminario, el Instituto Cultural de Francia de esta ciudad, uno de los patrocinadores de la manifestación, nos pidió hacer un seminario a dos voces sobre temas generales de la Matemática para un público de no especialistas, obviamente en francés. En dicha ocasión el Profesor Speranza defendió el valor cultural de la competencia en Epistemología de la Matemática con palabras muy fuertes, palabras que me impresionaron; sostuvo radicalmente que para un profesor de Matemática conocer la epistemología es tan importante como conocer la misma Matemática; el sentido de esta afirmación esta en el hecho que conocer *sólo* la Matemática no es suficiente si no se tiene el sentido mismo de la evolución del pensamiento matemático. Le había cedido el seminario introductivo por obvios motivos de importancia académica y fue así como me encontré desplazado dado que con estas palabras había anticipado parte de lo que había pensado decir, solo que yo hubiera usado, eso sí, un tono menos perentorio. Me vi obligado a cambiar el tema y tomé en consideración la necesidad que tiene el profesor de matemática de conocer la Epistemología por motivos profesionales, con el fin de disponer de un instrumento adecuado para la evaluación de las situaciones de aula, refiriéndome en particular de los llamados "obstáculos epistemológicos".
La noche (y las siguientes) la Embajada Italiana nos ofreció como alojamiento dos apartamentos adyacentes, únicos huéspedes de un enorme edificio silencioso y oscuro; pudimos entonces seguir discutiendo por largo tiempo de estas dos visiones, "cultural" y "profesional", que se integraban perfectamente; la ocasión fue ideal para delinear el sentido de esta doble dirección y nos prometimos encontrar un día para escribir las reflexiones que habían surgido.
Desafortunadamente ese día nunca llegó; en parte porque mis reflexiones epistemológicas tomaron otra dirección (hacia la semiótica y la noética) (D'Amore, 2003b); pero, sobre todo, porque algunos años después él se ausentó definitivamente, ausencia que aún hoy es sentida por mi y por toda la comunidad científica italiana, para la cual era un punto de referencia excepcional.

[1] El matemático Francesco Speranza (Milano 1932 – Parma 1998) es una figura emblemática de primer nombre nacional (en Italia) en lo que concierne a la reflexión en Epistemología de la Matemática, estudio al que se dedicó sobre todo en los últimos años de su vida. Muchos de los actuales estudiosos italianos de Didáctica de la Matemática se formaron científicamente dentro de su escuela.

Intentaré aquí retomar el hilo de aquella discusión, pero incluiré en esta ocasión algunas de mis nuevas reflexiones y experiencias de estudio y de investigación, delineando lo que para mi significa esta *doble dirección de sentido,* explicando la necesidad de una preparación fuerte en este tema *Epistemología de la Matemática* por parte de futuros docentes de Matemática (en mi opinión, no sólo de la escuela secundaria, pero aquí, me limitaré sólo a este nivel escolar).
Es posible, pero inútilmente fatigoso, hacer citaciones explícitas cada vez que se requiera de frases precisas que reportaría directa o implícitamente de los escritos de Francesco Speranza (Speranza, 1997), especialmente en el *primer sentido*, ya que él fue fuente de continua inspiración; es así como, para no tediar al lector con continuos reenvíos, prefiero citar de una vez por todas, esta importante referencia para todo el apartado 2. [Naturalmente, asumo personalmente la responsabilidad de cada una de las afirmaciones que haré, sin atrincherarme detrás de barricadas hechas por la falta de citaciones bibliográficas].

Existen por tanto, como lo expresé líneas arriba, dos motivaciones, a las que no se puede renunciar, que justifican la necesidad de una preparación cultural fuerte en Epistemología de la Matemática para los futuros docentes de la escuela secundaria; estas son:

- factores culturales (que trataré en los apartados 2. y 3.)
- factores didácticos o profesionales (que trataré en los apartados 4. y 5.)

## 2. Los factores culturales

El desarrollo de nuestra disciplina es el resultado no sólo de un progreso técnico y formal; por el contrario, estos dos aspectos son una consecuencia de la continua revisión del sentido y del significado que la Matemática busca al interno de sí misma. El rigor, por ejemplo, uno de los aspectos que más resiente el profano o el alumno, no es un hecho intrínseco ni una costumbre del profesor, es sólo una necesidad lingüística y filosófica (D'Amore, Plazzi, 1990), un filtro (a veces fatigoso) que el matemático da al propio instrumento lingüístico para evitar tergiversaciones (por tanto pluralidad de sentidos) y para dar un significado único a la comunicación. Es por esto que el rigor no es un hecho absoluto, es un hecho relativo a la época y al lugar, siempre en constante evolución.
De otra parte, el desarrollo de la Matemática, procede en diversas direcciones, pero no se puede negar que, en primera instancia y con gran fuerza, se asocie a la creación de conceptos;[2] ahora bien, no se pueden crear conceptos sin delinearlos epistemológicamente, por tanto, queriendo o sin querer, quien reflexiona sobre el desarrollo de la Matemática debe necesariamente plantearse el problema de la naturaleza de los conceptos (aquellos mismos que, en Matemática, generalmente se les llama *objetos*) (D'Amore, 2001).

[2] Evito cuidadosamente de decir *descubrimiento* y prefiero decir *creación;* la elección epistemológica de base es evidente (D'Amore, 2003); de todas formas esta discusión no es hoy tan acremente debatida como lo fue en el pasado.

Como consecuencia encontramos que, olvidándonos del matemático de profesión que podría producir, y a veces produce, teoremas y/o teorías al interno de un determinado dominio sin salirse de este y sin estudiar el sentido general epistemológico, otra persona *cualquiera* que se ocupe de Matemática y de su desarrollo *debe* necesariamente ponerse el problema epistemológico como hecho cultural.

El profesor de Matemáticas no es un creador de teoremas ni de teorías, es un profesional, experto en Matemática, a quien la sociedad le propone de hacer sí que los jóvenes ciudadanos construyan y aprendan a usar competencias matemáticas.[3]

En primer lugar, él debe conocer la Matemática, no obstante sobre este punto se hayan presentado diversas posiciones, yo lo juzgo un punto de partida al que no se puede renunciar (D'Amore, 1999a).

Pero el profesor tiene dos deberes principales que consisten en:

- efectuar una *transposición didáctica*; el profesor no puede limitarse banalmente a repetir la Matemática aprendida en la Universidad (su lugar de formación cultural, en lo que concierne a la Matemática); él *debe* transformar la Matemática (el saber matemático elaborado durante su formación académica) en un saber que sea adecuado a los alumnos que tiene bajo su cargo, es decir, él debe transformar el Saber en un "saber de enseñar" (D'Amore, 1999b); esta transformación no es un hecho banal, por el contrario, es ampliamente creativa y forma parte estrechamente de la profesionalidad del docente (Fandiño Pinilla, 2002);
- *comunicar la Matemática*; todos nosotros sabemos que, en una situación de aula, el carácter mediador del profesor es mucho más fuerte y que el estudiante casi nunca tiene acceso directo al Saber, limitando su propio empeño a la relación personal con el profesor y al aprendizaje de la Matemática que el profesor ha elegido para él (en forma más o menos consciente, más o menos vinculada); por tanto, el paso de la Matemática enseñada del docente al aprendiz se da en una situación comunicativa por demás fuerte, dominada por las complejas redes de la pragmática de la comunicación humana (Watzlawick, Beavin, Jackson, 1976).

Tomando como base estos dos puntos, se ve claramente como el profesor no puede ignorar el *sentido* que tiene el desarrollo de la Matemática:

- de otra manera no podría cumplir aquel acto creativo que es la *transposición*; lo puede hacer, sí y sólo sí, está en grado de elegir críticamente al interno de un cuerpo sobre el cual tiene alguna legitimidad y capacidad de decisión; si, por ejemplo, retiene que la Matemática no ofrece alternativas epistemológicas, que el cuerpo de conocimientos es aquello que es, inmutable, eterno, indiscutible, aquello que él aprendió (al máximo antes del "paréntesis universitario"),[4] entonces no estará en grado de hacer la transposición didáctica y por tanto su éxito como profesor estaría en duda;

[3] Uso el término *competencia* al puesto de *conocimiento* no por caso (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

[4] Terminología de sólito atribuida a Felix Klein para indicar el período de estudio universitario de un futuro docente de Matemática; donde es implícito un juicio negativo de inutilidad en la

- de otra manera no podría *comunicar* la Matemática; sólo se puede comunicar lo que se ha construido dentro, aquello que forma parte de la experiencia personal, vivida, es decir personalizada; si la Matemática es vista como algo de impersonal, de a-temporal, sólo una sucesión de resultados secuenciales obtenidos por seres humanos que, mientras producen, sólo piensan al interno de la teoría en la cual crean, entonces no se puede hablar de comunicación sino de repetición de resultados; en la pragmática de la comunicación humana es implícito un sentido de propiedad crítica, de capacidad y de disponibilidad en la elección personal; de otra parte, uno de los límites de la Matemática transmitida en la escuela, más de una vez denunciado por Brousseau (1986, por ejemplo) es precisamente el carácter impersonal y a-temporal, este querer esconder la rica historia del esfuerzo y de las dificultades que los seres humanos han encontrado en la construcción de la Matemática tal y como la conocemos hoy; el estudiante que ve en la Matemática sólo los resultados finales, limpios y cristalinos, libres de toda fatiga y de toda discusión, ordenados, obtenidos aparentemente como consecuencia de una deducción axiomática que parece caída del cielo, se le induce a pensar que la Matemática *deba* ser así por naturaleza; si este estudiante es un futuro profesor de Matemáticas, llevará con sí, en su historia profesional, esta concepción equivocada de la disciplina.

Son muchos los autores que puedo citar en defensa de esta visión que da gran importancia a la cultura en Epistemología de la Matemática por parte de los futuros docentes.

Ciertamente Speranza (1997) se empeñó personalmente en la propuesta de incluir oficialmente esta materia como objeto de estudio en los programas de Especialización (postgrado) para la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria (que actualmente en Italia habilita para la enseñanza en la Escuela Secundaria). En aquel mismo texto, en particular de la página 124 a la página 127, Speranza me dio la posibilidad de considerar también Enriques, un Enriques en esta misma óptica, con una multiplicidad de citaciones que aquí no reporto. Una confrontación ulterior vino de Vailati, por ejemplo cuando muestra la importancia que tiene la reflexión sobre actitudes relevadas erróneas en el pasado, en la construcción de conceptos matemáticos, incluso en actividades didácticas (Vailati, 1896). Así como Bachelard, quien además es considerado por muchos como el promulgador de la idea de concebir el error en la ciencia como algo que tiene un valor intrínseco (Bachelard, 1951), tanto que en este campo condicionó el pensamiento de Brousseau (1983, 1989), el creador de la moderna Didáctica de la Matemática.

## 3. Consecuencias directas de los factores culturales en el campo didáctico, metadidáctico y como factores "transversales"

---

formación dado que, faltando una preparación específica, el docente de Matemática, una vez como tal, replicará el modelo observado cuando era estudiante pre-universitario (Loria, 1933).

Los aspectos delineados en 2. tienen consecuencias directas en campo didáctico; examinaré sólo algunos ejemplos, el primero en forma más profunda en el apartado 3.1., mientras que de los otros haré sólo un delineamiento en 3.2., pasaré después al apartado 3.3. donde trataré los aspectos metadidácticos y a 3.4. para aquellos "transversales".

*3.1 El problema de los "elementos primarios"*

Como lo he dicho en otras ocasiones (D'Amore, 2000a), en el siglo XVIII apasionaba la pregunta: ¿qué significa "simple de entender"?. ¿Lo "simple" es un hecho absoluto o un hecho relativo?. ¿Lo "simple" es indiferentemente tanto para el científico como para el estudiante que esta aprendiendo las primeras bases?. O ¿Existe alguna diferencia?, si es así ¿cuál?.

Estas preguntas encontraron intentos de respuesta incluso en la *Encyclopédie* de Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert [1717-1783] y Denis Diderot [1713-1784], en particular en los artículos *Análisis*, *Síntesis*, *Método*, *Elementos de ciencia*. [Se trata, según mi opinión, de un estudio específico de Didáctica que se diferencia de los estudios generales de la Pedagogía].

Podría ser interesante, sólo para tener una idea de la situación, ver como d'Alembert autor de la sección *Elementos de ciencias*, intenta hacer emanar ideas didácticas de la hipótesis cartesiana de síntesis, de lo simple a lo complejo, y de como se ve obligado él mismo a admitir que la situación se complica de inmediato.

Se de forzar las cosas, pero es como si se comenzara a admitir algo de moderno, que existe una profunda diferencia entre:

- la disciplina en sí, tal y como es conocida y practicada por los especialistas, por los científicos;
- la Didáctica general en sí, tal y como esta constituida, con sus acepciones generales aceptables y garantizadas por reflexiones significativas conducidas por expertos del sector;
- la Didáctica disciplinar en sí, que tiene parámetros, paradigmas y objetivos totalmente diferentes.

El verdadero punto en discusión esta evidenciado cuando d'Alembert intenta ver que significa que un concepto *precede* a otro: ¿de cuál partir?; ¿cuál tomar como punto de partida?; ¿cuáles son los *conceptos primarios*?.

Por ejemplo, en Matemática, el científico toma como punto de partida ideas como espacio, plano, recta, punto, número, … y algunas "conexiones" entre estos; pero, ¿estamos totalmente seguros que en Didáctica de la Matemática esto sea lo más conveniente?. ¿Los elementos primarios del científico son o deben ser necesariamente los mismos elementos primarios del alumno?.

Más que aceptar los elementos primarios del científico, ¿no sería mejor recorrer la generación de ideas que han llevado a elegir estos objetos como primarios?.

No es aquí el caso de profundizar, pero es representativo el hecho que este debate, de carácter didáctico, lleve a d'Alembert a pasar de una posición del todo cartesiana a una posición lockiana y después ver como intenta de conciliar estas dos: «Las ideas simples pueden reducirse a dos tipos: uno son las ideas abstractas

(…) el segundo tipo de ideas simples está encerrada en las ideas primitivas que adquirimos a través de nuestras sensaciones».
Pero: los elementos que los estudiantes, que se acercan por primera vez al estudio de la ciencia, están en grado de comprender, ¿son o no son los mismos elementos de la ciencia?; o: ¿son por lo menos de igual naturaleza?.

- Si se responde que sí, entonces el método didáctico es una reestructuración, una sistematización, una puesta en campo progresivo de los elementos de la ciencia, del saber de los científicos ((Kintzler, 1989);
- si se responde que no, ¿cómo se pasa de las competencias infantiles, de los elementos cognitivos que posee un estudiante al inicio de su recorrido escolar, al saber científicamente entendido?.

En todo caso, ¿qué relación existe entre los elementos primarios adquiribles por el estudiante y los elementos primarios de las ciencias académicamente entendidas (Saber o *Savoir savant*)?.
Para mi, es a partir de este debate que comienza finalmente a delinearse una terna de contenidos:

- los contenidos de la disciplina *d*, establecidos por esta, por su historia;
- los contenidos de la Didáctica de aquella disciplina: $D_d$; esta tiene como objeto de estudio la sistematización (en la óptica: enseñanza → aprendizaje eficaz) de los elementos de la disciplina *d*, pero los contenidos específicos de $D_d$ no son sólo los contenidos de la disciplina *d*, son nuevos respecto a *d*;
- los contenidos de otra teoría, más general, que se podría identificar con aquella que evidencia el problema de como pasar, más allá del caso específico, de los contenidos de *d* a los contenidos de $D_d$, sea cual sea la disciplina *d*; se podría entonces comenzar a pensar en una especie de Didáctica general, entendida en este sentido.

Es gracias a una relación entre reflexión epistemológica y didáctica sobre la Matemática que se llega al debate sobre los *elementos primarios*, para entender el por qué no existe coincidencia entre los elementos primarios para un estudiante al inicio de su formación escolar y los elementos primarios de la Matemática. Sin esta posibilidad de reflexión crítica, el profesor se sentiría inclinado a pensar que esta coincidencia se presenta.

*3.2 Las "fracciones", los racionales, el pasaje a los reales, la densidad, la continuidad*

Sin una fuerte preparación en Epistemología de la Matemática, todos los temas citados en el título de este párrafo podrían ser fuente de equívoco: el profesor transmite un saber a los alumnos, después de una transposición didáctica que él juzga idónea. Pero, en un caso de no suceso, cuando los alumnos no construyen conocimiento (tanto menos competencia), la única alternativa que se tiene es pensar que los estudiantes no tienen la capacidad para afrontar este tipo de cuestiones, que no están a la altura. O, peor aún, pensar que él no es idóneo para ejercer la profesión docente.
Precisamente las competencias epistemológicas revelan, por el contrario, las increíbles incidías que se esconden detrás de estos temas. En Fandiño Pinilla (2002), por ejemplo, se estudia precisamente el caso ejemplar del debate

didáctico/epistemológico entre “fracciones” (objeto del saber escolar) y “racionales” (objeto del Saber).
Las increíbles convicciones que tienen algunos estudiantes maduros (alumnos que cursan los últimos años de la escuela superior, incluso después de haber seguido un curso de Análisis) sobre la densidad y la continuidad, propuestos en el aula como puros objetos matemáticos de aprender, sin ninguna atención epistemológica, están evidenciadas por gran número de autores que han hecho investigaciones didácticas en este campo.[5]

*3.3 Factores “meta”, determinantes para la didáctica*
Además del problema delineado en 3.1. sobre qué son los elementos primarios, existen otros factores que llamamos meta-matemáticos; por ejemplo, qué son las definiciones, o, qué son las demostraciones.
Sobre la interpretación de estos dos términos, habría mucho que decir; sin una profunda competencia epistemológica, se corre el riesgo de tergiversar burdamente el *sentido* de estas dos componente fundamentales de la Matemática. Cuántas veces he visto estudiantes confundir estos dos términos, confirmando la ausencia de *sentido*. Desafortunadamente, en varias ocasiones, escuché profesores que corregían el enunciado de una definición dada por el estudiante con expresiones del tipo: «No se dice así, debes decir así…»; y pensar que, hablando precisamente de definiciones, escuché por primera vez a Francesco Speranza hablar de “la libertad de la Matemática” (lo que me impulsó a intervenir didácticamente sobre este tema: D’Amore, 1986). Y ¿qué decir de las demostraciones repetidas a memoria?. ¿Cuántas veces nosotros, como profesores universitarios, hemos escuchado a más de un estudiante pronunciar la terrible frase: «Esta demostración no la recuerdo»?. También esto es señal de la tergiversación de base en lo que respecta al *sentido* de la demostración (y por tanto, más en general, de la Matemática y del conocimiento matemático).
¿Cómo se forman estas deletéreas convicciones en los estudiantes?. Ciertamente no por generación espontánea: estas son el resultado o de falaces enseñanzas directas o de interpretaciones inducidas por comportamientos repetidos y tal vez causados por el contrato didáctico.
Sólo una fuerte preparación de los docentes en Epistemología de la Matemática (y en Didáctica de la Matemática) puede, de una parte, fortalecer las convicciones positivas de los profesores sobre estos temas, y, de otra, hacerlos didácticamente activos.
Ya sea en las definiciones como en las demostraciones debe existir un amplio “grado de libertad”, favorecido por el profesor, conquistado por el estudiante; es esto lo que nos enseña la Epistemología.
A propósito de demostración, deseo señalar el hecho de como tergiversaciones negativas lleva a casos aberrantes, como el señalado en D’Amore (1999b) en las páginas 358-360, relativo al comportamiento demostrativo de hechos absurdos por parte de un estudiante de 3° grado de la escuela superior (17 años) que escribía frases en secuencia sin ninguna relación lógica entre ellas, pero sintácticamente

[5] Sobre este tema véase: D’Amore, Fandiño Pinilla (2004) e D’Amore (2005).

correctas, rica de gerundios, de conectores causales, con un formalismos preciso y exuberante. Intervenir en estos casos es casi imposible, pero lo que sí es posible es prevenirlos; sólo que para prevenir estas situaciones se necesita de una sólida competencia tanto en Epistemología como en Didáctica de la Matemática, no sólo en Matemática.

*3.4. Factores "transversales"*

Entre las numerosas conquistas culturales fuertes que derivan de la cultura epistemológica, doy un gran énfasis a las siguientes tres reflexiones:

- como esta hecho el lenguaje de la Matemática
- como se aprende la Matemática
- las fuertes relaciones que existen entre semiótica y noética

Me limitaré a breves consideraciones.

Son muchas las tergiversaciones que existen al rededor del lenguaje que usamos en Matemática; y tantas las convicciones que determinan misconcepciones. Sobre este tema trabajé por mucho tiempo (D'Amore, 1993, 1996, 2000b; por ejemplo). Si la convicción (débil) del profesor es que el lenguaje que se usa en Matemática es unívoco y eternamente determinado a priori por la comunidad científica, no podrá esperar del alumno más que un uso ciego de este, sin vías personales; lo que lleva por lo general a una especie de intento de imitación a-crítica por parte del estudiante, una mala copia del lenguaje, vacía y estéril, que constituye para la clase un tipo espejismo al que nunca se llega; en D'Amore (1993) llamé "matematiquese" este lenguaje de aula, dando diferentes pruebas de su existencia y de su carácter negativo.

"Cómo" se aprende la Matemática no es sólo un problema psicológico, pedagógico o didáctico, como ingenuamente se podría pensar en un primer momento, porque el "cómo" está estrechamente ligado al "qué", el aprendizaje matemático es también un hecho que tiene que ver con la Epistemología; por ejemplo, hay quienes creen que el aprendizaje de nuestra disciplina puede reducirse únicamente a cálculos (en diversos niveles), como si este fuera el *sentido* de la Matemática; esta característica fuertemente intrínseca instrumental es mucho más común de cuanto se pueda imaginar: ¿cómo podemos pensar que un joven llegue a *construirse* conocimiento matemático?. En una visión epistemológica *realista*, esta posición podría incluso encontrar un puesto, dado que los conceptos matemáticos son el punto de llegada ideal; mientras que en una visión *pragmática* el concepto es la construcción personal obtenida en cada momento (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003a), en el paso de una relación personal con el saber, hacia una relación institucional, en una visión antropológica (Chevallard, 1992).

Que el aprendizaje matemático este fuertemente ligado con la noética, entendida como aprendizaje conceptual, esta fuera de toda discusión; cae bajo la mirada de todos y es confirmado por varios autores (Duval, 1993, 1995). Precisamente sobre la base del impulso de Duval, en los últimos años, he dedicado mi energía de investigador a este tema; me limito a indicar D'Amore (2003a, b). Que la Matemática se vea obligada a servirse de representaciones al interno de registros semióticos es un hecho ya aceptado, es más, considerado obvio, después de los estudios pioneros de Duval. Que existe una paradoja cognitiva en el hecho que un estudiante deba construir conocimiento conceptual a través de representaciones semióticas (la "paradoja de Duval") (en sus tres características esenciales: representación, transformación de tratamiento y transformación de conversión) (Duval, 1993, 1995; D'Amore 2003a, b) es también una idea ampliamente compartida, tanto que en D'Amore (2003a) inicié una operación de integración de las teorías didácticas de Brousseau y las observaciones de Duval, mostrando como elementos de una se pueden explicar por medio de la otra; en particular, mostré como a veces una situación a-didáctica no tiene suceso a causa, precisamente, de una falta de devolución que se centra en el hecho que el estudiante no alcanza la noética a través de la acción sobre la semiótica. De todo esto se concluye con la máxima evidencia que un profesor no puede fingir e ignorar la cuestión, confundiendo, como sucede generalmente, noética con semiótica: él, adulto, culto, experto, *profesor*, cree de trabajar didácticamente sobre los conceptos, mientras el estudiante, joven, no culto, esta trabajando sobre las representaciones semióticas (al máximo sobre sistemas de representación semiótica). Ignorar este *hecho* comporta una separación entre las dos acciones (aquella del enseñar y aquella de aprender) que sólo puede producir un fracaso.

Existen, según mi forma de pensar, muchos otros factores que son de tipo "transversal" y que tienen en común la necesidad del estudio de la Epistemología de la Matemática; aquí quería mostrar, como ejemplo, sólo algunos de estos.

## 4. Los factores didácticos (o profesionales)

En 2. evidencié el por qué es necesaria la competencia en Epistemología de la Matemática en la preparación de futuros profesores de Matemática, haciendo referencia tanto a motivos culturales (que estudié con cualquier particularidad en 3.) como a motivos didácticos (o profesionales). En este apartado 4. afrontaré más detalladamente precisamente esta última motivación. Me reservo un (especie de) anexo en 5. donde desarrollaré ulteriormente este apartado 4., pero sin crear discontinuidad con lo ya afirmado en 3.

### *4.1 Obstáculos epistemológicos*

Todos los investigadores en Didáctica de la Matemática conocen la "teoría de los obstáculos", teoría fundamental de Guy Brousseau (1983, 1986, 1989; véase también D'Amore 1999a, para un tratamiento al interno de una teoría compleja que involucra toda la didáctica de la Matemática). Por más distinciones que se puedan hacer, sigue siendo fundamental, para la gestión de la vida en aula y para el análisis de los errores (con todo lo que implica en el campo de la evaluación), la distinción en tres tipologías de obstáculos:

- ontogenéticos
- didácticos
- epistemológicos.

Si tomamos el "triángulo de la didáctica" (Chevallard, 1985) como modelo de la situación de aula (en particular para evidenciar la complejidad del sistema) (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002), entonces se puede intentar como una primera aproximación que los obstáculos:

- ontogenéticos son asociables al vértice "alumno"
- didácticos son asociables al vértice "maestro"
- epistemológicos son asociables al vértice "Saber".

Esta forma de ver las cosas da una idea de unidad al interno de la Didáctica, como teoría clarificadora de las relaciones, que de otra forma se eludirían. En tal caso, pero, resulta obvio que este instrumento potencialmente excepcional produce resultados positivos en las manos del profesor sí y sólo sí él toma conciencia (conciencia que se logra gracias a los estudios de Didáctica); pero, por lo que respecta al tercer punto, él tiene necesidad de un conocimiento más, el de la Epistemología precisamente, para poder por lo menos reconocer, entre los inevitables errores de los estudiantes, aquellos que se pueden catalogar propiamente como los que tienen origen en un obstáculo epistemológico. En este caso, la Didáctica por sí sola no puede alcanzar y pide ayuda a las competencias epistemológicas.

*4.2 Cambio de convicciones*

Hoy sabemos muy bien que las competencias maduradas por los futuros profesores de Matemáticas producen en ellos cambios de convicciones y de hecho cambio de concepciones.[6] Dado que sobre este tema la bibliografía es vasta, reenviamos a D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), artículo en el cual la bibliografía es fuertemente seleccionada. En este trabajo se presenta una investigación cuyo objetivo era el de evidenciar precisamente los cambios en las convicciones y en las concepciones que sobre la Matemática, la Didáctica de la Matemática y sobre el papel del docente de Matemática, se hayan presentado en los profesores de escuela secundaria en formación inicial, después de haber cursado (en Bologna) los 4 semestres del programa de Especialización para la enseñanza de la Matemática. El hecho tiene aquí, un particular intereses, dado que en Bologna dentro de esta especialización se deben cursar 2 cursos específicos de Epistemología / Historia de la Matemática, mientras que los 2 cursos de Didáctica

[6] La distinción entre estos dos términos, a primera vista sinónimos, es hoy ya aceptada en ambiente de investigación; se usa hacer una diferencia más o menos explícita como sigue (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004):

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios /expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones de una persona (A) sobre un determinado hecho, argumento, cosa (T) determina la *concepción* (K) de A relativa a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los otros integrante de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

A veces, al puesto de "concepción de A relativa a T" se habla de la "imagen que A tiene de T".

de la Matemática tienen un fuerte contenido problemático y epistemológico, siguiendo la tradicional “escuela francesa” y se da gran énfasis a las cuestiones fundacionales (los cursos se basan en el estudio de diversos materiales, entre los cuales D’Amore, 1999a, que se discute oralmente en grupos, por dos semestres). Reenvío aún al texto D’Amore, Fandiño Pinilla (2004), para los detalles, pero resulta un hecho muy interesante cuando a declarar a propósito de sus cambios son precisamente los futuros profesores que siguen el programa de especialización: siempre se mezclan motivaciones didácticas con motivaciones epistemológicas, expresión del hecho que los estudiantes, dado que serán profesionales de la escuela en el futuro, tienden a evaluar sus nuevas competencias epistemológicas al interno de la acción didáctica.
Entre los cambios de convicciones que mayormente asombran a los mismos profesores en formación, emerge una diferencia entre una precedente imposibilidad de un uso impropio del lenguaje matemático y una nueva disponibilidad a escuchar el alumno que se empeña en una comunicación a sujeto matemático. Sobre este punto, gran influencia tienen las pruebas de práctica docente efectuadas concretamente en las aulas; quienes cursan el programa de especialización cambian radicalmente de convicciones sobre el *sentido* que debe tener al contenido matemático que los estudiantes expresan sobre la base de dos factores que han aprendido a reconocer en los cursos del programa de Especialización:

- si bien la comunicación del estudiante A al estudiante B sea incorrecta (del punto de vista del adulto), B entiende el sentido
- generalmente el uso del lenguaje es inapropiado (respecto a las expectativas del adulto) no por lagunas matemáticas sino por incomprensión en la base.

Un ejemplo de este segundo punto esta dado en el comportamiento de un estudiante que, a la solicitud de definir el paralelogramo responde: «Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados dos a dos». Se tiene un disentimiento entre las expectativas: de una parte el profesor advierte la omisión de un adjetivo que “cierre” la frase ya que, dicha así, no tiene sentido; de otra parte, el estudiante juzga que haber repetido correctamente 12 palabras de 13 sea ya un muy buen resultado. Es verdad que juega un papel importante el contrato didáctico y las diversas concepciones que de la Matemática tienen los dos actores de la historia, pero también es verdad que existen expectativas epistemológicas diversas en lo que concierne al uso del lenguaje en Matemática.

### *4.3. Currículo y la centralidad del alumno*

Las observaciones precedentes tienen notables repercusiones en el sentido del currículo; de un pesante fardel de respetar, el currículo se convierte en un instrumento de plasmar y de aprovechar en la situación verdadera de aula, móvil conductor de la historia de clase. De una lista más o menos comentada que viene impuesta en aula y que condiciona toda la actividad dentro de esta, el currículo se transforma en arma que se adaptada a hacer sí que cada estudiante sea puesto, con base en sus propias capacidades, en las mejores condiciones para construir competencias matemáticas; de un currículo normativo se pasa precisamente a un

currículo que refleja puntos de vista epistemológicos (Fandiño Pinilla, 2002, pag. 36 y segg.: «el punto de vista epistemológico en la construcción del currículo»).
Esto coloca al centro la figura del alumno, y deja de lado aquella secuencia curricular junto con los meros contenidos. Esto significa interpretar al revés aquello que en D'Amore (1999b) he llamado "epistemología del aprendizaje de la Matemática": el problema real de quien se ocupa de Didáctica de la Matemática, como investigación o como profesión, es el de entender los procesos de aprendizaje de la Matemática, no limitarse únicamente a crear ideales de enseñanza.
Sólo un ejemplo para clarificar este punto de vista.
Desde hace muchos años forma parte de las tareas de un estudiante de Matemática aprender a demostrar teoremas; el Saber decidió que el paradigma de respetar universalmente en lo concerniente a tal actividad esta en la lógica megárico – estoica y aquella aristotélica; razón por la cual, muchos consideran *preliminar*, a la actividad de demostrar, el aprendizaje de la Lógica, como un capítulo de la Matemática. Es por eso que los estudiantes aprenden las tablas de verdad semánticas, los conectivos, en particular la implicación material. Una vez hecho esto, comúnmente se confunde deducción (meta-lingüística) con la implicación (lingüística) y se pasa a la estructura de los teoremas y a sus demostraciones. Si el estudiante no logra el éxito, se le considera como no apto para la demostración o por lo menos no en grado de demostrar. Pero si se da particular atención a las propuestas demostrativas de los estudiantes, dando la vuelta al sentido de la experiencia, se pueden encontrar sorpresas interesantes. Me di cuenta del hecho que los estudiantes que no lograban llevar a buen término una demostración simplemente no sabían gestionar el instrumento meta-lógico propuesto y pensé que tal vez este era no adecuado. Fue entonces que me prometí observar a estos estudiantes para entender los diferentes tipos de errores que cometían. Así descubrí que muchos de ellos hacían referencia continuamente a ejemplos inapropiados, enunciando la tesis como si fuera hipótesis, intentando anclar las implicaciones materiales a ejemplos concretos. Recordé la lógica nyaya, desarrollada hace miles de años en India, en la cual el esquema de razonamiento típico estaba concebido en forma muy diversa de la forma de razonamiento aristotélico. Para conocer los detalles de este largo estudio, circunstanciado y corroborado con ejemplos tomados del aula, reenvío a D'Amore (2004a).
Me limito aquí a un ejemplo, el más representativo de esta lógica (exactamente como el silogismo de Sócrates es considerado como ejemplo prototípico de la lógica aristotélica):

1. el objeto A se mueve (afirmación)
2. porque se le aplicó una fuerza (razón)
3. cada vez que se le aplica una fuerza a un objeto este se mueve (proposición general); por ejemplo: si se amarran bueyes a una yunta, esta se mueve (ejemplo)
4. al objeto A se le aplicó una fuerza (aplicación)

*por tanto*

5. el objeto A se mueve (conclusión).

Es bastante fácil escribir en forma moderna este razonamiento. Pero antes de dar una formulación en lenguaje moderno del ejemplo anterior, introduzcamos un simbolismo oportuno; sean:
A, B objetos dados, X un objeto genérico;
P(X): enunciado predicativo abierto "X se mueve"
F(X): enunciado predicativo abierto "a X se le aplicó una fuerza".
El enunciado abierto F(X) es verdadero si cada vez que, sustituida la variable X por una constante A, F(A) es experimentalmente verificable (en el sentido: su veracidad cae bajo el peso de los sentidos) (esta es, al menos, la interpretación empirista nyaya; es necesario hacer notar también que, para los lógicos nyaya, los sentidos son seis).
El razonamiento nyaya se puede ahora interpretar formalmente como sigue:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Afirmación: | 1. | P(A) | afirmación (aún no probada) |
| Razón: | 2. | F(A) | causa que actúa sobre P(A) |
| Tesis: | 3. | $(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$ | proposición general |
| | | Por ejemplo: $F(B) \rightarrow P(B)$ | ejemplo |
| Aplicación: | 4. | F(A) | del caso general se pasa al caso en examen: una fuerza ejerce una acción sobre A |
| Conclusión: | 5. | P(A) | A se mueve |

Ahora bien, algunos de los estudiantes entrevistados y considerados como no en grado de conducir con éxito una demostración, de hecho efectuaban demostraciones siguiendo la lógica nyaya y no siguiendo la lógica aristotélica o megárico–estoica. Sin informaciones de carácter epistemológico, no hubiera contado con los instrumentos epistemológicos para darme cuenta, como investigador, de este hecho. De igual forma, sin los instrumentos epistemológicos adecuados, el profesor se queda sin armas. En este caso, pude sugerir al profesor confrontar estos dos instrumentos demostrativos en aula, buscando analogías y deferencias.
Es obvia la importancia que en todo esto tiene una visión epistemológica del currículo que privilegia la visión central del alumno en aula.

### *4.4. La influencia sobre la evaluación*
De los últimos párrafos, particularmente, emerge una visión compleja de la evaluación como proceso y no como fin, por tanto como instrumento didáctico. En Fandiño Pinilla (2002, pag. 75 y segg.) se propone una evaluación que tiene diferentes objetivos: evaluación del currículo, autoevaluación de la eficacia del proceso de enseñanza, evaluar para dar información de lo que se considera importante, evaluar para tomar decisiones, evaluar para dar un juicio del alumno… En cuanto a los objetivos y a las técnicas de cada una de estas acepciones, la situación es complicada precisamente porque en muchas ocasiones, para tomar decisiones, se necesita hacer elecciones de carácter epistemológico (véase la evolución histórica-social de la idea de evaluación en los últimos 100

años, en las páginas 94-96 del texto citado líneas arriba; y el elenco de las funciones y de las características de la evaluación según el enfoque de diversos Autores, a partir de la elección epistemológica, en las páginas 97-98). Una innovación de la evaluación implica elección de criterios y es por esto que se llama "evaluación por criterios". A frenar estos específicos impulsos innovadores (que, en algunos Países, se han convertido normas de ley para la Escuela), están ciertamente las convicciones de los profesores y muchas de sus concepciones de escuela, sentido de la instrucción etc., en forma mucho más específica.
Pero, hemos visto como las convicciones epistemológicas, incluso cuando faltan o dan la idea de faltar (Speranza las llama: *implícitas*, 1997), marcan decididamente todas las otras, así que el círculo se cierra…
Entre las elecciones, no siempre implícitas, surgen, con un cierto porcentaje, aquellas actitudes que reflejan, más o menos, formas de interpretar la Matemática y que se identifican con escuelas epistemológicas:

- formalismo
- platonismo
- logicismo
- empirismo
- intuicionismo según Poincaré
- intuicionismo como construcción de actos de pensamiento
- …

y hoy, más en general, condensadas en dos grandes grupos (Speranza, 1997, D'Amore, 1987):[7]

- realismo
- pragmatismo

que las resumen (D'Amore, 2003b).

Ahora bien, el uso de las convicciones maduradas con los estudios epistemológicos debe hacer pareja con una fuerte competencia en Didáctica de la Matemática porque sólo así se contribuye a formar aquella *herramienta*, aquellos instrumentos útiles, prácticos y teóricos, en la profesión docente, para entender de esta forma la evolución de las situaciones de aula. A esto favorece ciertamente la valiosa contribución de Guy Brousseau quien, además de ser pionero y de haber determinado los primeros pasos de la Didáctica de la Matemática, proporciona aún hoy, en mi opinión, material de reflexión, en constante evolución y de gran profundidad. Ideas como el contrato didáctico, la teoría de los obstáculos, la teoría de las situaciones,… junto con los análisis críticos que han llevado a la desaparición de precedentes formas de interpretar la Didáctica de la Matemática, son aún hoy de analizar y de potenciar: son misterios que esperan ser aclarados.

[7] Este trabajo de 1987 es (más o menos) el texto de una comunicación que hice en Valencia en el mismo año; también este viaje fue una ocasión de confronto muy fuerte con Francesco Speranza sobre temas epistemológicos; yo intentaba encontrar raíces de autoridad, de las "bases epistemológicas" dado que, en aquel momento, estábamos detallando los nuevos programas de matemática para la escuela italiana y, naturalmente, era para mi un gran conforto las discusiones y los debates con un gran Maestro.

## 5. Epistemología e Historia de la Matemática; la Historia como clave para entender la Epistemología; el uso de la Historia en la Didáctica de la Matemática

### *5.1. Epistemología e Historia de la Matemática*

«La filosofía sin la historia es vacía, la historia sin la filosofía es ciega», afirmaba, y con razón, Kant (por ejemplo: Speranza, 1997, pag. 145). Lakatos circunstanciaba: «La filosofía de la ciencia sin la historia es vacía, la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega» (Lakatos, 1971, pag. 102).

Una vez aceptada la posición de estos gigantes, todo comentario es superfluo. Se concluye que, si la Epistemología estudia la evolución de los conceptos, no es posible pensar en escindir los estudios de Epistemología de la Matemática de aquellos de la Historia de la Matemática. Esto justifica la elección de llamar a los cursos del programa de Especialización con el nombre actual de Epistemología / Historia de la Matemática.

### *5.2. La Historia para entender la Epistemología*

Así, parece obvio pensar la Historia como la referencia paradigmática por excelencia para entender la evolución de las ideas y las necesidades de adecuar el pensamiento. Por ejemplo, si nada se supiese de los orígenes aristotélicos de la geometría euclidiana, ni de las geometrías no euclidianas con su consecuente revolución sobre el concepto de verdad matemática, ni de la necesidad de un nuevo rigor que diese a los términos primarios y a los axiomas un *sentido* moderno, no se podría entender el por qué David Hilbert tuvo que escribir nuevos elementos de Geometría 22 siglos después de los de Euclides. Veo entonces en la Historia de la Matemática el aspecto clave para entender la Epistemología.

### *5.3. Uso de la Historia en la Didáctica*

Si bien los dos puntos anteriores sean de excepcional relevancia, tanto de dar razón a quien impone cursos de Epistemología a los profesores en formación, existe un punto que emerge con gran fuerza en los últimos 30 años, un punto al cual tanto Francesco Speranza como yo dimos forma curando la edición de 3 libros, con diversos títulos, que recogen experiencias verdaderas de profesores de distintos niveles escolares, cuando esto aún no era común (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995); se trata del uso de la Historia de la Matemática como instrumento didáctico en los cursos de Matemática.

Dado que este punto se relaciona estrechamente con las cuestiones epistemológicas, considero correcto hacer referencia a este hecho.[8] De otra parte, si se quiere usar la Historia de la Matemática en aula, se requiere conocer la Historia de la Matemática; por tanto tiene sentido el problema de la cuestión de la preparación en Historia de los futuros profesores de Matemática.

---

[8] Agradezco al amigo y colega profesor Giorgio Bagni (Universidad de Roma "La Sapienza") por el material y los consejos que generosamente me ha dado para la redacción de este apartado.

*5.4 La Historia de la Matemática en la formación de futuros profesor de Matemáticas*

Según Freudenthal, aprender la matemática significa "re-inventarla" (se describe un proceso denominado "mathematising") (Freudenthal, 1973): por tanto el papel de la componente histórica en la enseñanza justifica una profundización específica. Considerar un concepto matemático a través de su evolución histórica requiere la toma de posiciones epistemológicas no siempre fáciles: la misma selección de los datos históricos no es neutra (Radford, 1997) y problemas notables están relacionados con su interpretación, conducida inevitablemente a la luz de nuestros actuales paradigmas culturales, mediante los cuales se ponen en contacto culturas "diversas pero no inconmensurables" (Radford, Boero, Vasco, 2000, pag. 165).

Hemos insistido mucho sobre el hecho que la enseñanza esta influenciada por las concepciones de los profesores a propósito de la naturaleza de los conocimientos científicos y de su evolución. Surge por tanto fundamental que un profesor se confronte directamente con la historia de la disciplina y que pueda llegar a explicar las referencias históricas consciente y coherentemente con las propias concepciones epistemológicas (Thompson, 1992; Moreno, Waldegg, 1993; Speranza, Grugnetti, 1996).

En general, la Historia de la Matemática ofrece a la didáctica algunas posibilidades importantes (Furinghetti, Somaglia, 1997):

- en primer lugar aquella de la aproximación anecdótica que, siendo en ocasiones considerada superficial, puede reforzar en términos significativos la motivación de quien aprende (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995; Radford, 1997; D'Amore, 1999a);
- la posibilidad de una reflexión metacognitiva;
- la posibilidad de un conocimiento orgánico de un periodo histórico y de la comprensión de las situaciones culturales que han determinado el nacimiento o la difusión de una idea matemática.

Refiriéndonos a aquel vértice del triángulo de la didáctica que llamamos Saber (Chevallard, 1985), llamaremos "conocimiento institucionalizado" la última versión, desde un punto de vista cronológico, del saber en cuestión, es decir la forma más reciente que ha sido aceptada por la comunidad científica: de esto se desprende que la institucionalización a la cual hacemos referencia viene a ser contextualizada y correlacionada con los diversos ambientes socio-culturales (Bagni, 2004b). A este punto entra en juego la componente histórica: es de hecho muy extraño (o tal vez imposible) que un conocimiento matemático nazca de una idea absolutamente nueva, sin ninguna conexión con las experiencias del pasado: por muchas razones un conocimiento incorpora en sí mismo las propias raíces históricas. ¿Qué relación existe entre el conocimiento institucionalizado y su propia historia?.

Tal problemática nos lleva a indagar con mayor profundidad en la estructura histórica de un conocimiento matemático que, como veremos, podría influenciar notablemente la didáctica. Siguiendo D'Amore (2001), podríamos, como ejemplo, preguntarnos: ¿el incremento progresivo del saber puede ser asociado a un proceso de inclusión (acumulación cuantitativa) o de sobre-posición (cualitativa)?.

En otras palabras: ¿la reformulación de un objeto matemático incluye las viejas versiones o las reemplaza? (D'Amore 2001).

La adopción de modelos de (pura) inclusión o de (pura) sobre-posición comporta problemas teóricos: dichos modelos sufrirían de una formulación descontextualizada. La concepción de evolución del saber K que prevé incluir un conocimiento K($m$+1) al conocimiento K($m$) no tiene en cuenta que K($m$) tenía sentido en su contexto original C($m$), mientras el conocimiento K($m$+1) resiente del nuevo contexto socio-cultural C($m$+1) que se ha creado (en Bagni, 2004a se examina, como ejemplo, el caso de los procedimientos infinitesimales). De otra parte, la sobre-posición de los conceptos conduciría a una continua re-fundación siempre nueva, mientras la (progresiva) variación del ambiente socio-cultural lleva a pensar en progresivas adaptaciones.

En un momento histórico (por ejemplo, en el momento actual) y en un contexto socio-cultural C($n$) determinado, podemos pensar en procesos en los cuales las versiones "históricas" del conocimiento en consideración vienen a formar parte del Saber en relación con los contextos socio-culturales en los cuales se desarrollaron; por este motivo, el proceso se entiende como una continua evolución cronológica, un continuo devenir.

Volvamos ahora al aspecto didáctico: descrito el Saber específico de conocimiento K, es necesario proceder a su transposición didáctica, es decir en saber de enseñar. Hemos visto la importancia que reviste, en esta transformación, la Epistemología; y ahora nos preguntamos: ¿qué papel se le reconoce, en esta fase, a la Historia de K?. En particular, ¿cómo se diferencian las modalidades de la transposición del conocimiento K($n$) (institucionalizado en el momento en el cual se incluye en el proceso de enseñanza / aprendizaje) de aquellas de la transposición de las referencias que constituyen la "historia de K"?. El punto crucial está constituido por la transposición de la "historia de K"(Gadamer, 1975).

Indiquemos dos elecciones posibles:

- la transposición de K(1), K(2), …, K($n$-1) tomando como referencia el contexto C($n$) (*actualización*);
- la transposición de K(1), K(2), …, K($n$-1) tomando como referencia los respectivos contextos C(1), C(2), ..., C($n$–1) (*contextualización histórica de las referencias*).

Cada una de las opciones se basa evidentemente en una postura epistemológica fuerte que presenta, desde el punto de vista didáctico, aspectos delicados:

- una evolución histórica *propuesta didácticamente* desde un punto de vista moderno no sería tal vez radicalmente inaceptable (mientras que una interpretación platónica de la historia en sentido absoluto nos dejaría hoy escépticos y perplejos); dicha concepción permite, por ejemplo, mostrar a los alumnos los principales obstáculos epistemológicos y hacer precisiones sobre algunas posiciones históricas cuya debilidad epistemológica fue revelada sucesivamente (Sfard, 1991);
- pero una formulación que pretenda seguir el desarrollo cognitivo de un recorrido modelado sobre la evolución histórica (Piaget, Garcia, 1983) encontraría dificultades teóricas y alguna duda fundamental.

La presentación de elementos históricos con referencia al propio contexto socio-cultural (Radford, 2003) ofrece la posibilidad de una profundización orgánica e induce reflexiones fundamentales sobre la génesis de un concepto (Radford, Boero, Vasco, 2000). La elección de una historia "interna", de un desarrollo insolado de la Matemática, aparece problemática (Grugnetti, Rogers, 2000, pag. 40) y difícilmente sostenible desde un punto de vista epistemológico.
Esto, sólo para trazar un panorama reducido de la complejidad de la gestión de la Historia con fines didácticos; esta bien intentar una aproximación anecdótica para motivar, pero no es este el verdadero y propio reto cognitivo exitoso. En el momento que se intenta algo más significativo, vemos surgir problemas y desafíos de gran interés que pueden y deben ser afrontados por el docente de matemática con conciencia profunda.
En todo caso, Historia y Epistemología están estrictamente relacionadas entre ellas y su sistema lo es con la Didáctica de la Matemática. Tanto que se podría seguir la vía abierta de Kant y reforzada por Lakatos, acuñando una ulterior máxima:
La Didáctica de la Matemática sin relaciones con la Epistemología y la Historia es como un instrumento ágil y potente que ninguno sabe usar plenamente; la Epistemología y la Historia son medios culturales fuertes, abstractos y profundos, que la Didáctica de la Matemática hace concretos y útiles al progreso de la humanidad, a la construcción de competencias, a la conciencia del propio saber.

***Referencias bibliográficas***

Bachelard G. (1951). *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. París: PUF.

Bagni G.T. (2004a). Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. En curso de impresión.

Bagni G.T. (2004b). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. En curso de impresión.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau. G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1986). Il ruolo della definizione nella didattica della matematica. *Insegnare*. 6, 9-13.
D'Amore B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. En: Actas del "II Congreso Internacional sobre investigación en didáctica de las Ciencias y de la Matemática". Valencia 1987, 323-324.
D'Amore B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301.
D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.
D'Amore B. (1999a). Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell'educazione. *Pitagora Notizie*. 4, 2.
D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [En curso de impresión por el Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., México].
D'Amore B. (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*. México D.F., México. 12, 1, 239-50.
D'Amore B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.
D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica", *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [En francés: Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Bélgica. XXXVIII, 1, 2001, 17-46]. [En español: Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, Barcelona, España, 27, 2001, 51-76].
D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [En español: La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución, *TED*, Bogotà, Colombia, Università Pedagogica Nazionale, 11, 2002, 63-71].
D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En curso de impresión por el Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., México].
D'Amore B. (2004a). Young pupils' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). En curso de impresión en idioma español en *Uno*, 2005.
D'Amore B. (2004b). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Chipre): Intercollege Press Ed. Actas del

"Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio - 6 julio 2001. 111-130.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. En idioma español, en curso de impresión: *Epsilon*, 2005.
D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B., Plazzi P. (1990). Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3,18-24.
D'Amore B., Speranza B. (eds.) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volumen I. Roma: A. Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volumen II. Roma: A. Armando.
D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milán: Angeli ed.
Duval R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, 37-65.
Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [En español: *Semiosis y pensamiento humano*. Berne: Peter Lang – Cali: Universidad del Valle. 1999].
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel.
Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En: English L. (ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum. 631-654.
Furinghetti F., Somaglia A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*. XVIII, V, 2, 1.
Gadamer H.G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad (2nd ed.: 1989).
Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. En: Fauvel, J., van Maanen J. (eds.). *History in Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer. 39-62.
Kintzler C. (1989). Éléments. En: AA. VV. (eds.) (1989). *Écrits de Condorcet*. París, Edilig.
Lakatos I. (1971). *History of science and its rational reconstructions*. Cambridge: Cambridge U.P.
Loria G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. *Rapport général*. *L'enseignement mathématique*. XXXII, 5-20.

Moreno L., Waldegg G. (1993). Costructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 24, 5, 653-661.

Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17, 1, 26-33.

Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: Anderson M. et Al. (eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas. 49-79.

Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. En: Fauvel J., van Maanen J. (eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. 162-167.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Speranza F., Grugnetti L. (1996). History and epistemology in didactics of mathematics. En: Malara N.A., Menghini M., Reggiani M. (eds.) (1996). *Italian research in mathematics education*, Roma: CNR. 126-135.

Thompson A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. London: D.A.N.Y. McMillan, 127-208.

Vailati G. (1896). Sull'importanza delle ricerche relative alla storia della scienza. En: Vailati G. (1911). *Scritti*. Firenze – Leipzig: Seeber-Barth.

Watzlawick W., Beavin J.H., Jackson D.D. (1967). *Pragmatic of the human communication*. New York: W.W. Norton & C.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla